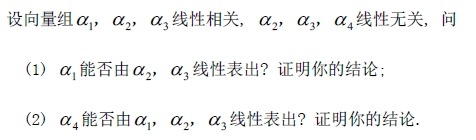
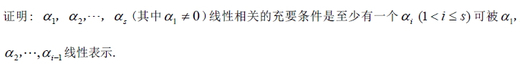
第三讲 向量组的线性相关性 作业

1. 

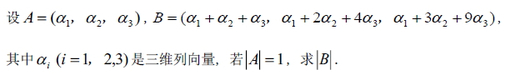
(1).能。由于线性无关，所以其部分组也线性无关；由于线性无关，而线性相关，所以可以由线性表出，并且线表系数唯一。

(2).不能。由(1).知可以由线性表出，并且线表系数唯一，则设=，则假设能由它们线性表出，则有，即，即推出了能由线性表出，即线性相关，然而这与题设线性无关矛盾，因而不能由线性表出。

2. 

必要性证明：由于线性相关，所以存在一组不全为0的使得，而由于，所以，所以至少存在一个∈，其值不为0。我们在这些值不等于0的系数集合{}中取其中下角标最大的系数，由于除{}之外的中的剩余系数均=0，那么均=0，此时在方程两边同时除以并移项，即有**= =**，其中i∈[2,s]——这就证明了线性相关的必要条件为：至少有个(1<i≤s)可被线性表示。

充分性证明：由于存在(1<i≤s)可被线性表示，则线性相关，由于部分相关则整体相关，则线性相关。——这就证明了线性相关的充分条件为：至少有个(1<i≤s)可被线性表示。

3. 

|**B**|=||=||=||=2||= 2||=2|**A**|=2

由于**B=A·**，所以|**B**|**=**|**A**|**·=**2|**A**|=2

4. http://nos.netease.com/edu-image/E18A5E4EADAB9DBC403A3D3C558BE94F.jpg?imageView&thumbnail=520x520&quality=100

由题，有(**A**-**E**)**A**=**0**，且**A**、**A**-**E**均为n阶方阵，可知r(**A**-**E**)+r(**A**)≤n。

又因r(**A**-**E**)+r(**A**)=r(**E**-**A**)+r(**A**)≥r(**E**)=n，

则r(**A**-**E**)+r(**A**)=n，即r(**A**-**E**)=n-r。

由题，有(**A**-**E**)**A**=**0**，不妨设**A**等价于其的某r个极大无关行向量组所构成的矩阵**L**=，同时设(**A**-**E**)~**K**=，那么由于初等变换等价于左乘右乘初等矩阵，所以可得此等式**KL**=**0**，即上述等式可进一步被写为，即表示这个行向量组，能够由，即**L**的行向量组线性表示。

由于的线性无关性，可见，即**K**中每一行的前(靠左的)r个分量均被迫=0，即，即**K**中前(靠左的)r个列向量均为**0**。即有**K**=，其中并不确定是否线性无关。即有r(**K**)≤n-r。

那么有r(**A**-**E**)+r(**A**)=r(**K**)+r(**L**)≤r+(n-r)=n，

又因r(**A**-**E**)+r(**A**)=r(**E**-**A**)+r(**A**)≥r(**E**)=n，

则r(**A**-**E**)+r(**A**)=n，即r(**A**-**E**)=n-r。

但其实在L和K这样设置的情况下，得这样写：

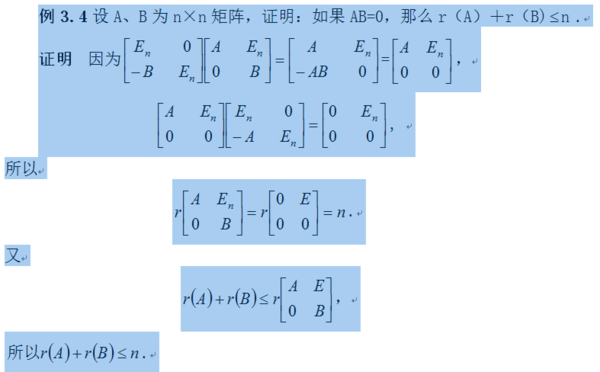
由题，有**A**(**A**-**E**)=**0**，不妨设**A**等价于其的某r个极大无关行向量组所构成的矩阵**L**=，同时设(**A**-**E**)~**K**=，那么由于初等变换等价于左乘右乘初等矩阵，所以可得此等式**LK**=**0**，即上述等式可进一步被写为，即表示这个行向量组，能够由，即**L**的列向量组线性表示——这就尴尬了。

我们得到**KL**=**0**，才能真正得到想要的结果。**A**(**A**-**E**)=**0**或者**KL**=**0**两边转置，没有实质效果。L与K的反设置也没有实质效果。

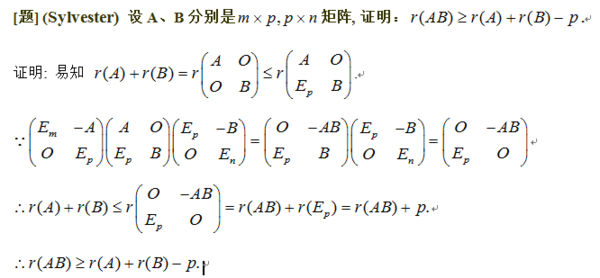
若我们用(**A**-**E**)**A**=**0**，得到的却是**K’L’**=**0**，得不到**KL**=**0**。

这道题的故事：

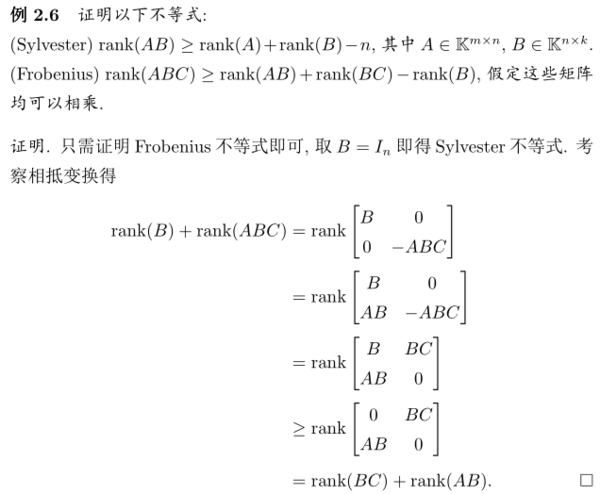
乘法：r(**A**)+r(**B**)≤n：



r(**A**)+r(**B**)≤n 的拓展：(或者是r(AB)≥，配合“r(AB)≤其中的任意一个”出奇效)



它的再拓展：



关于伴随矩阵：设A为方阵：

若r(A)=n，则对A·A\*=|A|E两边取行列式，可知满秩的A的行列式|A|≠0，得到|A\*|≠0，则r(A\*)也满秩。

若r(A)<n-1，则A的所有n-1阶子式均=0，则根据伴随矩阵的定义，可知A\*为0阵。

若r(A)=n-1，则A有一个n-1阶子式≠0，则根据伴随矩阵的定义，可知A\*也有一个对应的1阶子式≠0，所以至少有r(A\*)≥1。又因为r(A·A\*)+n≥r(A)+r(A\*)，则有r(|A|E)+n≥n-1+r(A\*)，即有r(0·E)+1≥r(A\*)，即有1≥r(A\*)。综上r(A\*)=1。

加法：r(A)+r(B)≥n：

设矩阵是m×n的，A=[α1,α2,……αn],B=[β1,β2,……,βn]

那么A+B=[α1+β1,α2+β2,……αn+βn]

r(A+B)=r(α1+β1,α2+β2,……αn+βn)

由于α1+β1,α2+β2,……αn+βn可由 α1,α2,……αn,β1,β2,……,βn线性表出；所以r(A+B)≤r(α1,α2,……αn,β1,β2,……,βn)

由于α1,α2,……αn,β1,β2,……,βn可由(α1,α2,……αn中的任意一组极大无关组+β1,β2,……,βn 中的任意一组极大无关组)所构成的向量组线性表示出；所以 r(α1,α2,……αn,β1,β2,……,βn)≤r(α1,α2,……αn中的任意一组极大无关组,β1,β2,……,βn 中的任意一组极大无关组)≤r(α1,α2,……αn)+r(β1,β2,……,βn)=r(A)+r(B)

所以：r(A+B)≤r(A)+r(B)；若记r(α1,α2,……αn,β1,β2,……,βn)=r(A|B)，则根据以上步骤，还将有r(A+B)≤r(A|B)≤r(A)+r(B)

这个同样的问题的分块矩阵证明方法：

由于：矩阵乘积的秩不大于每一个因子的秩，两个因子中有一个是可逆的，它们乘积的秩等于另一个因子的秩。

所以根据=，可知r(A+B)=r≤r=r。

又因r=r≤r=r=r(A)+r(B)，所以r(A+B)≤r(A|B)≤r(A)+r(B)

设向量组A与向量组B的秩相等,且向量组A能由向量组B线性表示,证明向量组A与向量组B等价?

向量组A能由向量组B线性表示的充分必要条件是 r(B)=r(B,A).

【充分条件(必要性)很容易证：若A=BC则r(B)=r(B,0)=r(B,BC)=r(B,A)，或者用向量组的方法：由题，B的一个极大无关组C能够线表B，B能线表A，所以C能线表A，所以C能线表(A,B)，所以C是(A,B)的一个极大无关组，所以r(B,A)=r(C)=r(B)。

必要条件(充分性)的证明：

r(B,A)=r(B)=r(C)，由于r(C)=r(B,A)，所以C的极大线性无关组等价于(B,A)的极大线性无关组，即C是(B,A)的极大线性无关组，则(B,A)可由C线表，而C与B等价，所以(B,A)可由B线表，所以A可由B线表。————或者用反证法：假设A的列向量组中存在一个列向量不能被B的列向量们线表，则r(B,A)>r(B)，而r(B,A)=r(B)，所以A的每个列向量均能被B的列线表，所以向量组A能由B线表。】

或者用：

向量组B能由向量组A线性表示  
<=> B 可由 A 的极大无关组线性表示  
<=> A 的极大无关组 也是 (A,B)的极大无关组  
<=> r(A) = r(A,B)

证明:由已知向量组A能由向量组B线性表示

所以 r(B) = r(B,A).

又由已知 r(A)=r(B)

所以 r(A)= r(B)= r(B,A) = r(A,B)

所以 向量组B能由向量组A线性表示.

所以 向量组A与向量组B等价.